Espace de Bergman.

Lem : On définit $A^2(\mathbb{D}) = \{f \in H(\mathbb{D}),\ \int_{\mathbb{D}} |f|^2 < \infty\}$.
Pour tout K compact de $\mathbb{D}$, $f \in A^2(\mathbb{D})$, $\|f\|_{\infty,K} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\, d(K,\partial\mathbb{D})} \|f\|_{L^2(\mathbb{D})}$.

Soit $a \in K$. r tel que $B(a,r) \subset \mathbb{D}$. Par la formule de la moyenne :
$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})\, d\theta$; donc $\frac{r^2}{2} f(a) = \int_0^r f(a)\, \rho\, d\rho = \frac{1}{2\pi}\int_0^r \int_0^{2\pi} f(a+\rho e^{i\theta})\, \rho\, d\rho\, d\theta$
car moyenne vraie pour tout $0 < r < d(a,\partial\mathbb{D})$.

Donc $|f(a)| = \left|\frac{1}{\pi r^2}\int_{B(a,r)} f(z)\, dx\, dy\right| \leq \frac{1}{\pi r^2}\|f\|_{L^2(B(a,r))}\, \lambda(B(a,r))^{1/2} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\, r}\|f\|_{L^2(\mathbb{D})}$.
Donc $|f(a)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\, d(a,\partial\mathbb{D})}\|f\|_{L^2(\mathbb{D})} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\, d(K,\partial\mathbb{D})}\|f\|_{L^2(\mathbb{D})}$ lorsque $r \to d(a,\partial\mathbb{D})$

Prop : $(A^2(\mathbb{D}), \langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2(\mathbb{D})})$ est un espace de Hilbert.

Soit $(f_n) \subset A^2(\mathbb{D})$ de Cauchy. Puisque $L^2(\mathbb{D})$ est complet (Riesz-Fischer), $f_n \xrightarrow{L^2} g \in L^2(\mathbb{D})$.
Soit K compact de $\mathbb{D}$. Par lemme, $(f_{n|K})$ est de Cauchy dans $(\mathcal{C}^0(K), \|\ \|_{\infty,K})$ complet.
Ainsi (f_n) cvu sur tout compact de $\mathbb{D}$ vers f, holomorphe par Weierstrass
De plus, $\|f_{n|K} - f_{|K}\|^2_{L^2} \leq \lambda(K)\|f_n - f\|_{\infty,K} \to 0$. donc par unicité de la limite L^2,
$g_{|K} = f_{|K}$. De là, $g = f$ pp, i.e. $f_n \xrightarrow{L^2} f \in A^2(\mathbb{D})$. $A^2(\mathbb{D})$ complet.

Prop : Soit $\left(e_n : \begin{array}{l} \mathbb{D} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\, z^n \end{array}\right)$. Cette famille forme une base hilbertienne de $A^2(\mathbb{D})$

- $\langle e_n, e_m\rangle = \sqrt{\frac{(n+1)(m+1)}{\pi^2}}\int_{\mathbb{D}} z^n \bar{z}^m\, dx\, dy = \sqrt{\frac{(n+1)(m+1)}{\pi}}\left(\int_0^1 r^{n+m+1}\, dr\right)\left(\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta}\, d\theta\right) = \delta_{n,m}$
- Soit $f \in \mathrm{Vect}(e_n)^\perp$. On écrit $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$, $c_n(f) = \langle f, e_n\rangle = 0$.

$c_n(f) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\int_{\mathbb{D}} \bar{z}^n f(z)\, dx\, dy = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\lim_{r\to 1^-}\int_{|z|<r} \bar{z}^n f(z)\, dx\, dy$ par cvD.
$= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\lim_{r\to 1^-}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \int_{|z|<r} z^k \bar{z}^n\, dx\, dy\right)$ par cvN sur $B(0,r)$.
Or $\int_{|z|<r} z^k \bar{z}^n\, dx\, dy = \left(\int_0^r \rho^{k+n+1}\, d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta}\, d\theta\right) = \frac{\pi r^{2n+2}}{n+1}\delta_{k,n}$.
Donc $c_n(f) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\lim_{r\to 1^-}\frac{\pi a_n}{n+1} r^{2n+2} = \sqrt{\frac{\pi}{n+1}}\, a_n$. puis $a_n = 0$, $f = 0$. On conclut par TSO.